Annexe 2
Logarithmes musicaux

Cette note est rédigée à l'intention de ceux qui s'intéressent au calcul logarithmique ou plus généralement à la mesure précise des intervalles, mais elle ne fait pas partie de ce dont la connaissance est requise dans le cadre du cours d'organologie. Sa lecture est recommandée à tous : la question des logarithmes est moins difficile qu'on pourrait le craindre. On lira en particulier le paragraphe 3.

1. Rappel sur les logarithmes

Les logarithmes ne sont qu'un artifice arithmétique, permettant de simplifier les opérations de calcul. Le système, inventé au début du XVII^e^ siècle par le mathématicien anglais Lord Neper (connu en français sous le nom de Napier et dont le nom a formé celui des « logarithmes népériens »), a permis de résoudre des problèmes mathématiques importants pour la musique, notamment le calcul précis du tempérament égal.

Le principe est relativement simple et peut être illustré par un exemple facile. Supposons que l'on veuille multiplier 100 par 1000 (la réponse est évidente, mais l'exemple se veut vraiment facile). Le principe logarithmique consiste à considérer que 100 est égal à 10 élevé au carré (10^2) et que 1000 est égal à 10 élevé au cube (10^3) ; on constate ensuite qu'il suffit d'additionner les exposants ($2 + 3 = 5$) pour arriver au résultat : $10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$, qui est égal à 100 000, le résultat auquel il fallait parvenir. Dans ce calcul, la « base » du logarithme est 10. La base est établie au départ ; on effectue ensuite tous les calculs sur les exposants, en remplaçant les multiplications auxquelles on voulait procéder par de simples additions, (ou les mises à une puissance par de simples multiplications) et on applique le résultat comme exposant à la base 10, pour obtenir le résultat de l'opération. Le système fonctionne quelle que soit la base, à la condition expresse que celle-ci ne soit pas modifiée en cours d'opération.

L'exemple proposé ci-dessus est trop simple parce que tant la base que les exposants utilisés sont simples. Mais le calcul logarithmique autorise les exposants fractionnaires, ce qui ouvre des possibilités considérables. Jusqu'à l'avènement des ordinateurs, le calcul logarithmique était freiné par la difficulté de calculer les exposants fractionnaires[1] : il fallait recourir à des tables imprimées relativement peu maniables. Aujourd'hui, n'importe quel logiciel tableur (ainsi que quelques autres programmes courants) et la plupart des calculettes de poche calculent sans difficulté les logarithmes, en particulier les logarithmes à base 10 (logarithmes décimaux), au moyen d'une fonction qui s'écrit généralement LOG(x) ou LOG10(x) et qui renvoie le logarithme décimal de x — c'est-à-dire la valeur de y telle que $10^y = x$; cette valeur est celle qu'il faut utiliser pour commencer le calcul logarithmique[2].

[1] Les exposants fractionnaires sont une autre manière de formuler des racines : $x^{1/2} = \sqrt{x}$; $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$; etc.

[2] Sur les calculettes effectuant le calcul logarithmique, il y a généralement une touche LOG qui donne le logarithme à base 10 : on tape le nombre dont on veut connaître le logarithme, puis cette touche. On trouve souvent aussi une touche Ln qui donne le logarithme népérien : il s'agit d'un logarithme à base e = 2,718…

2. Logarithmes musicaux

Dès le XVII^e siècle, le calcul logarithmique a connu d'importantes applications musicales. En particulier, il a permis rapidement de calculer le tempérament égal, alors que ce calcul s'était heurté jusque là à des difficultés considérables.

Ce qui est particulièrement intéressant dans le calcul logarithmique, c'est qu'il correspond à une conception intuitive des intervalles. Un exemple concret peut illustrer cela : le demi-ton tempéré (celui du tempérament égal) se définit dans nos esprits comme le résultat de la *division* de l'octave en douze parties égales. En termes de rapports numériques, cependant, le rapport de demi-ton doit se définir plutôt comme celui qui, multiplié douze fois par lui-même (c'est-à-dire élevé à la puissance 12), donne pour résultat le rapport d'octave, 2/1 (ou plus simplement 2). Le rapport de demi-ton tempéré, en d'autres termes, correspond à la racine douzième de 2 ($\sqrt[12]{2}$). Il apparaît ici que notre conception usuelle (le demi-ton comme douzième partie de l'octave) est plus simple que la conception mathématique (le demi-ton comme racine douzième de l'octave) — et que la simplification est précisément celle qu'autorise le calcul logarithmique. Le rapport d'octave peut se définir comme 2^1 (2 exposant 1). Il suffit alors de diviser l'exposant par 12 pour obtenir la valeur du rapport de demi-ton tempéré, $2^{1/12}$ (ce qui n'est qu'une autre manière d'écrire $\sqrt[12]{2}$). Pour obtenir la valeur réelle du rapport, il suffit donc de rechercher le logarithme de 1/12 — à cette importante restriction près que, dès le départ et jusqu'au bout de cette division par 12, il s'agissait d'exposants de 2, donc d'un logarithme à base 2, pour lequel les tables ne sont pas aisément disponibles.

Cette difficulté a marqué l'histoire des logarithmes musicaux, dont quelques points saillants sont évoqués ci-dessous. Elle a été définitivement résolue par l'avènement de l'ordinateur qui permet non seulement le calcul aisé des logarithmes à base 10, mais qui peut, par un artifice assez simple décrit au paragraphe 3 ci-dessous, calculer les logarithmes à n'importe quelle autre base. Avant d'y venir, nous considérerons ci-dessous brièvement trois bases logarithmiques utilisées pour les calculs musicaux.

2.1 Logarithmes à base 10

Le logarithme décimal de 2 est approximativement égal à 0,301 (ce qui signifie que $10^{0,301} = 2$). Ceci invite à diviser l'octave en 301 parties, de telle manière qu'il soit possible de retrouver aisément le résultat de n'importe quel calcul dans une table de logarithmes à base 10. C'est ce qu'a proposé Joseph Sauveur, l'inventeur de l'acoustique, dans ses *Principes d'acoustique et de musique* (1701). L'octave est divisée d'abord en 43 parties que Sauveur appelle « mérides », puis chacune de celles-ci en 7 parties appelées « eptamérides » — il y a donc au total 301 eptamérides dans l'octave. Le demi-ton tempéré vaut 25,083 eptamérides. Ce système a permis à Sauveur de calculer diverses manières d'accorder le clavecin (y compris le tempérament égal) ainsi que des systèmes orientaux (arabes) : c'est probablement le premier usage des logarithmes appliqué à l'ethnomusicologie.

Félix Savart (1791–1841) a proposé une unité logarithmique, le savart, pratiquement identique à l'eptaméride de Sauveur, sinon que Savart est parti du logarithme de 2 calculé avec cinq décimales : 0,30103. Il y a 301,03 savarts dans l'octave. La différence est négligeable : le demi-ton tempéré vaut 25,086 savarts. Le calcul en savarts a continué d'être pratiqué en France jusqu'à une époque récente, tandis que les pays anglo-saxons préféraient les *cents* proposés par Ellis, décrits au paragraphe 2.3 ci-dessous.

Pour connaître le nombre de savarts dans un intervalle donné, il suffit de prendre le logarithme du rapport numérique correspondant à cet intervalle et de le multiplier par 1000. Par exemple, le rapport numérique correspondant à la quinte est 3/2, soit 1,5. L'opération log(1,5) donne pour résultat 0,17609, soit 176,09 savarts. C'est la quinte juste, un peu plus grande que la quinte tempérée qui vaudrait 7 demi-tons tempérés, soit 175,6 savarts. À partir de là, on peut poursuivre le calcul logarithmique : deux quintes, par exemple, valent 176,09 + 176,09 = 352,18 savarts ; c'est une neuvième majeure, dont il faut retrancher une octave pour obtenir la valeur du ton : 352,18 – 301,03 = 51,15 savarts. Ce ton est un peu plus grand que le ton tempéré, qui vaudrait 25,086 + 25,086 = 50,172 savarts.

Si l'on veut retrouver les rapports numériques correspondant à ces intervalles, il faut se souvenir que les savarts sont les exposants d'une base 10 multipliés par 1000. Le rapport numérique correspondant à 50,172 savarts est égal à $10^{0,050172}$, soit (après retour à la calculette) 1,122 — c'est le ton au tempérament égal. Le rapport numérique correspondant à 51,15 savarts est égal à $10^{0,05115}$, soit 1,125 — c'est le ton majeur. Ces valeurs permettent ensuite de calculer encore qu'à partir d'un *la*3 de 440 Hz, par exemple, le *si*3 au tempérament égal a une fréquence 440 x 1,122 = 493,68 Hz, alors que le *si*3 obtenu par deux quintes (*la–mi–si*) aura 440 x 1,125 = 495 Hz.

2.2 Logarithmes à base 2

L'utilisation musicale de la base 2 se justifie par le fait que l'octave correspond au rapport numérique 2/1. L'octave, dans ce système, devient l'unité ; le demi-ton tempéré en est la douzième partie, soit 1/12 ; la quinte tempérée vaut 7/12, puisqu'elle compte 7 demi-tons ; etc. Pour revenir aux rapports numériques, ces valeurs doivent être considérées comme les exposants de la base 2 choisie au départ. Le rapport de demi-ton tempéré est donc égal à $2^{1/12}$, soit 1,06 ; le rapport de quinte tempérée est $2^{7/12}$, soit 1,498 (contre 1,5 pour la quinte juste), etc. L'unité de travail est ici l'octave, singulièrement plus parlante que le savart ou l'eptaméride[3]. Cependant, si les intervalles qui forment des parties simples de l'octave (le douzième d'octave, demi-ton tempéré, le quart d'octave, tierce mineure tempérée, la quinte tempérée de 7/12[es] d'octave, etc.) se conçoivent aisément, les autres intervalles se calculent d'autant plus difficilement que les tables de logarithme à base 2 sont rares.

C'est Juan Caramuel y Lobkowitz (1606–1682) qui est l'inventeur de ces logarithmes spécifiquement musicaux, qu'il décrit pour Athanasius Kircher dans une lettre de 1647[4].

2.3 Logarithmes à base $\sqrt[12]{2}$

Aujourd'hui où l'électronique rend aisé le calcul sur n'importe quelle base logarithmique, la solution la plus simple paraît être de prendre le demi-ton tempéré comme unité. La base logarithmique, racine douzième de 2 ($\sqrt[12]{2}$) paraît complexe ; mais ce n'est pas vraiment un inconvénient, puisque la base n'est utilisée qu'au début et à la fin du calcul — et encore. Dans ce système, la dimension d'un intervalle se mesure simplement en nombre de demi-tons tempérés : la tierce majeure tempérée mesure 4 unités, la quarte tempérée 5 unités, etc. Le calcul reste plus difficile, cependant pour les intervalles non tempérés : c'est pourquoi il faut s'arrêter un instant à la méthode qui permet de calculer sur n'importe quelle base.

Deux systèmes logarithmiques à bases différentes sont entre eux dans un rapport constant. Ceci veut dire que pour passer de l'un à l'autre, il suffit de multiplier les résultats par une constante. Le système logarithmique basé sur le demi-ton tempéré (c'est-à-dire sur $\sqrt[12]{2}$) attribue à l'octave (rapport 2/1) la valeur 12 (puisque l'octave contient par définition 12 demi-tons). Nous avons vu au paragraphe 2.1 que le logarithme décimal de 2 vaut 0,30103. La constante recherchée est donc le nombre par lequel il faut multiplier 0,30103 pour obtenir 12 ; ce nombre est 39,86314.

À partir de là, il est possible de calculer précisément le nombre de demi-tons contenu dans n'importe quel intervalle. On cherche par exemple le nombre exact de demi-tons tempérés dans la quinte juste, dont le rapport numérique est 3/2, ou 1,5. Le logarithme décimal de 1,5 est 0,176091 que l'on multiplie par 39,86314 — le résultat est 7,01955, que l'on peut arrondir à 7,02. Ceci signifie que la quinte juste contient 7 demi-tons et 2 centièmes de demi-ton. La quinte tempérée vaut par définition 7 demi-tons. On a donc ici une mesure précise de la différence entre la quinte juste et la quinte tempérée : la première est plus grande de 2 centièmes de demi-ton que la première.

Il peut sembler difficile de mémoriser la constante. On se souviendra qu'elle établit le rapport entre deux valeurs du logarithme de 2, la première qui est 12 et la seconde qui est le logarithme décimal de 2. La constante peut donc s'écrire 12/log(2), ce qui est plus simple à mémoriser. Pour obtenir sur une calculette le « logarithme musical » de la quinte 1,5 la formule est donc :

```
Log(1,5) x 12 / Log(2)
```

[3] Il va de soit que les résultats obtenus sont les mêmes dans tous les systèmes décrits ici ; seule la facilité d'utilisation varie.

[4] Voir Ramon CEÑAL, « Juan Caramuel, Su epistolario con Atanasio Kircher, S.J. », *Revista de Filosofia* XII/44 (Madrid, 1953), p. 134 *sq*.

Le résultat sera 7,02 (ou un plus grand nombre de décimales, suivant la capacité de la calculette)[5].

Le système logarithmique à base $\sqrt[12]{2}$ a été décrit notamment, dès la fin du XVIII[e] siècle, par le mathématicien français Gaspard de Prony ; l'unité, correspondant au demi-ton, a parfois été appelée *prony*. Nous désignerons ce système ici sous le nom de « logarithmes musicaux », avec pour unité le demi-ton.

2.4 Cents

Le dernier système logarithmique à considérer ici est celui des *cents*, dont la base est le centième de demi-ton. Ce système, proposé par Alexander J. Ellis (1814-1890) est très utilisé par les ethnomusicologues. Sa base équivaut à $\sqrt[1200]{2}$ (racine 1200[e] de 2). Il est identique aux logarithmes à base de demi-ton décrits ci-dessus, multipliés par 100. Ainsi par exemple, la valeur en cents de la quinte juste est de 702, correspondant à 7,02 dans le système de logarithmes musicaux décrit au paragraphe 2.3. La formule de calcul de la quinte en cents est :

Log(1,5) x 1200 / Log(2)

Le système des cents invite à réfléchir sur la précision utile dans un calcul de ce type. Il faut considérer que le centième de demi-ton, qui se situe sous le seuil de discrimination de l'oreille (ce qui signifie que l'oreille ne perçoit pas un intervalle si petit), est une unité largement suffisante pour tous les calculs. On peut donc arrondir les cents à l'unité près, en supprimant les décimales ; de même, s'agissant des logarithmes musicaux à base du demi-ton du paragraphe 2.3, deux décimales sont largement suffisantes. Dès lors, le passage du logarithme musical au cent consiste seulement à supprimer la virgule.

3. Utilisation des logarithmes musicaux

Les logarithmes musicaux permettent un calcul précis de la dimension des intervalles en nombre de demi-tons tempérés et de centièmes de demi-tons. Par définition, tous les intervalles tempérés sont formés d'un nombre entier de demi-tons. C'est la mesure des autres intervalles qui est intéressante. Concrètement, trois valeurs de base suffisent à la plupart des calculs. Il s'agit des valeurs en demi-tons des principales consonances :

Octave = 12 demi-tons
Quinte juste = 7,02 demi-tons (contre 7 pour la quinte tempérée)
Tierce majeure = 3,86 demi-tons (contre 4 pour la tierce majeure tempérée)

À partir de ces valeurs de base, on peut calculer à peu près toutes les autres sans plus recourir au calcul logarithmique lui-même. Voici quelques exemples d'intervalles « justes »[6] et autres :
— La quarte est la différence entre l'octave et la quinte : 12 – 7,02 = 4,98 demi-tons tempérés
— La tierce mineure est la différence entre la quinte et la tierce majeure : 7,02 – 3,86 = 3,16 demi-tons tempérés
— Le ton majeur s'obtient par deux quintes moins une octave : 7,02 + 7,02 – 12 = 2,04 demi-tons tempérés
— Le ton mineur est la différence entre le ton majeur et la tierce majeure : 3,86 – 2,04 = 1,82 demi-ton tempéré

[5] Cette formule est valable quel que soit le type de logarithme utilisé. Si la calculette ne donne que les logarithmes népériens (Ln ; voir note 2 ci-dessus), la formule devient Ln(1,5) x 12 / Ln(2). Dans le logiciel Microsoft Excel, il est possible de spécifier la base logarithmique. La fonction est LOG(nombre;base). Pour obtenir le logarithme musical de la quinte, on peut donc écrire LOG(1,5;2^(1/12)), où 2^(1/12) est la représentation de $\sqrt[12]{2}$. Dans le logiciel Borland QuattroPro, la formule devient LOGBASE(nombre;base). Dans Excel, le logarithme décimal s'obtient par LOG10(nombre), alors que dans QuattroPro il est fourni par LOG(nombre).

[6] Intervalle « juste » signifie ici intervalle formé à partir de quintes et de tierces justes — c'est un sens qui a été donné au mot « juste » depuis le XVIII[e] siècle. Il faut noter cependant qu'il existe d'autres manières de définir les intervalles justes.

— Le demi-ton diatonique peut être la différence entre la quarte et la tierce majeure : 4,98 – 3,86 = 1,12 demi-ton tempéré ; mais il peut aussi être la différence entre trois octaves (comme de *do*1 à *do*4) et cinq quintes (comme de *do*1 à *si*3) : (3 x 12) – (5 x 7,02) = 36 – 35,10 = 0,90.
— Le demi-ton chromatique se définit par rapport au demi-ton diatonique, dont on vient de voir deux définitions. On notera seulement ici que, quelle que soit sa définition, le demi-ton chromatique sera plus petit que le demi-ton diatonique de 1,12 demi-tons tempérés, mais plus grand que celui de 0,90 demi-tons tempérés.
— Etc.